Wielandt型Transfer定理とその応用(有限群論とその周辺)

佐々木, 洋城

数理解析研究所講究録
424巻 1981年 114-124

Wielandt 型 transfer 定理とその応用

北大、理　佐々木洋城

0. transfer 理論についての吉田氏による詳細な論説[5]の中で次の問題が提出された。

問題　コホモロジー的とは限らない群関手についての Wielandt 型 transfer 定理はあるか。

ここではこの問題に対する肯定的な解決を与え、その応用として加群の Green 対応に関連して有限群の cohomology 群についての transfer定理を示す。

以下では G は有限群，k は特にことわらない限り単位元をもつ可換環であるとする。ここでは k 上の G－関手 a は G の各部分群 H に対して k-加群 a(H) は k 上有限生成であるとする。考える kG-加群は有限生成な kG-加群である。

1. Pairing

定義 1.1　a, b, c を k 上の G－関手とする．pairing $a \times b \longrightarrow c$ とは k-双線型写像

$$a(H) \times b(H) \longrightarrow c(H) : (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta \quad (H \le G)$$

の族で次の公理をみたすものをいう．　($H \le K \le G$, $g \in G$ とする)

(P.1)　$(\alpha'\beta')_H = \alpha'_H\beta'_H$　　$\alpha' \in a(K)$, $\beta' \in b(K)$,

(P.2)　$(\alpha\beta)^g = \alpha^g\beta^g$　　$\alpha \in a(H)$, $\beta \in b(H)$,

(P.3)　$\alpha^K\beta' = (\alpha\beta'_H)^K$　　$\alpha \in a(H)$, $\beta' \in b(K)$,

(P.4)　$\alpha'\beta^K = (\alpha'_H\beta)^K$　　$\alpha' \in a(K)$, $\beta \in b(H)$.

定義 1.2　r を k 上の G－関手とする．r が pairing $r \times r \longrightarrow r$ をもち，各 $H \le G$ に対して双線型写像

$$r(H) \times r(H) \longrightarrow r(H) : (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta$$

によって $r(H)$ が単位元をもつ結合的 k-多元環となり，かつ ρ^K_H が単位元を保存するとき ring とよばれる．

k 上の G－関手 r が ring であるとする．k 上の G－関手 a が r－加群であるとは pairing $a \times r \longrightarrow a$ が存在し各 $H \le G$ に対して双線型写像

$$a(H) \times r(H) \longrightarrow a(H) : (\alpha, \phi) \longmapsto \alpha\phi$$

によって $a(H)$ が右単位的 $r(H)$－加群になることをいう．

定義 1.3　k 上の G－関手とその間の射のつくるアーベル圏を $M_k(G)$ で表わす．$M_k(G)$ の部分圏で ring を対象とし ring homomorphism を射とする圏を $A_k(G)$ で表わす．

定義1.4　$r \in A_k(G)$が local ring であるとは $r(G)$ が局所環であることをいう。

例　Uを kG-加群とする。Uを係数加群とする n 次 cohomology 群G-関手 $\hat{h}^n_U$:

$$\hat{h}^n_U(H) = \hat{H}^n(H, U) \text{ , n次 Tate cohomology 群;}$$

$$\tau_H{}^K = \mathrm{cor}_{H,K} \ ;$$

$$\rho^K{}_H = \mathrm{res}_{K,H} \ ;$$

$$\sigma^g_H = \mathrm{con}^g_H \ .$$

U の中心化群G-関手　c_U :

$$c_U(H) = \{ u \in U \mid uh = u \ \text{ for all } \ h \in H \} \ ;$$

$$\tau_H{}^K : u \longmapsto u^K = \sum_{t \in [H\backslash K]} ut \ ;$$

$$\rho^K{}_H : u \longmapsto u \quad \text{(inclusion)} \ ;$$

$$\sigma^g_H : u \longmapsto ug.$$

$E = \mathrm{End}_k(U)$とおく。Eを次の様にして G-多元環とする:

$$\phi \in E,\ g \in G \text{ に対し } \quad \phi^g : u \longmapsto ((ug^{-1})\phi)g \quad (u \in U),$$

E の中心化群G-関手 c_E は定義1.2 の意味で ringである。これをUの自己準同型環G-関手とよび e_U で表わす。

任意の$\phi \in e_U(H)$ は準同型 $\phi_* : \hat{h}^n_U(H) \longrightarrow \hat{h}^n_U(H)$ をひきおこし双線型写像

$$\hat{h}^n_U(H) \times e_U(H) \longrightarrow \hat{h}^n_U(H) : (\alpha, \phi) \longmapsto \alpha\phi_*$$

は pairing の公理をみたす。従って $\hat{h}^n_U$ は e_U-加群である。
同様に c_U は e_U-加群である。

2. G-関手の Green correspondent

はじめに記号を用意する。 $a = (a, \tau, \rho, \sigma)$を k 上の G-関手、
$\mathcal{H}$ を $K \le G$の部分群の族とするとき

$$a(\mathcal{H})^K = \sum_{H \in \mathcal{H}} a(H)\tau_H^K.$$

以下この節では k を完備局所的単項 ideal 整域とする。

定義 2.1　$r \in A_k(G)$ を local ring, $a \in M_k(G)$ を r-加群とする。D を r の defect 群とし $H \ge N_G(D)$,

$$\mathcal{X} = \{ D^g \cap D \mid g \in G - H \},$$

$$\mathcal{Y} = \{ D^g \cap H \mid g \in G - H \}$$

とする。

$$1_H = \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_n$$

を $r(H)$ の単位元 1_Hの直交原始巾等元の和による分解とする。
Green [3] の Proposition 4.34 により丁度1個の ε_i に対して
$\varepsilon_i r_{|H}\varepsilon_i$ が D を defect 群としてもつ。この様な ε_iを ε とおくと

$$1_H \equiv \varepsilon \mod r(\mathcal{Y})^H, \quad \varepsilon^G \equiv 1_G \mod r(\mathcal{X})^G$$

が成り立つ。$\mathcal{X}$が D の真部分群の族であることから ε^Gが$r(G)$

の可逆元であることがわかる. H-関手 b を次の様に定義し、これを a の(G, D, H, r)に関する Green correspondent という:

$$b(K) = a(K)\varepsilon_K \quad (K \leq G).$$

命題 2.1　定義 2.1 の記号の下で次が成り立つ.

(1)　b は $a_{|H}$ の直和因子であり, $\varepsilon r_{|H}\varepsilon$-加群である.

(2)　$\lambda^G_H : a(G) \longrightarrow b(H) : \alpha \longmapsto \alpha_H \varepsilon$ は次の同型をひきおこす:

$$a(G)/a(\mathcal{X})^G \simeq b(H)/b(\mathcal{Y})^H$$

例　U を直既約 kG-加群, D を U の vertex, $N_G(D) \leq H \leq G$ とし, V を U の(G, D, H)に関する Green correspondent とする. このとき V を係数加群とする n 次 cohomology 群 H-関手 $\hat{h}^n_V$ は U を係数加群とする n 次 cohomology 群 G-関手 $\hat{h}^n_U$ の(G, D, H, e_U)に関する Green correspondent である. 又 V の中心化群 H-関手 c_V は U の中心化群 G-関手 c_U の (G, D, H, e_U) に関する Green correspondent である. 命題2.1 により同型

$$\hat{H}^n(G, U)/\sum_{X \in \mathcal{X}} \hat{H}^n(X, U)\mathrm{cor}_{X,G} \simeq \hat{H}^n(H, V)/\sum_{Y \in \mathcal{Y}} \hat{H}^n(Y, V)\mathrm{cor}_{Y,H},$$

$$c_U(G)/c_U(\mathcal{X})^G \simeq c_V(H)/c_V(\mathcal{Y})^H$$

が成り立つ.

3. Transfer 定理

この節の目的は命題 2.1 (2) で定義した $\lambda^G_H : a(G) \longrightarrow b(H)$ が同型になるための十分条件を与えることである．初めに次の key lemma を述べる．

補題 3.1 $r \in A_k(G)$ を ring, $a = (a, \tau, \rho, \sigma) \in M_k(G)$ を r-加群とする． $H \leq G$ とし r は H-projective であると仮定する．$\phi \in r(H)$ を ϕ^G が r(G)の単数であるものとする．次の様に２つの k-準同型を定義する：

$$\lambda^G_H : a(G) \longrightarrow a(H) : \alpha \longmapsto \alpha_H \phi ,$$

$$\mu_H^G : a(H) \longrightarrow a(G) : \beta \longmapsto (\beta\phi)^G .$$

このとき次が成立する：

(1) ρ^G_H, $\lambda^G_H : a(G) \longrightarrow a(H)$ は共に分解型の単型である．

(2) τ_H^G, $\mu_H^G : a(H) \longrightarrow a(G)$ は共に分解型の全型である．

(3)
$$a(H) = \mathrm{Im}\ \rho^G_H \oplus \mathrm{Ker}\ \mu_H^G$$
$$= \mathrm{Im}\ \lambda^G_H \oplus \mathrm{Ker}\ \tau_H^G .$$

定義 3.1 a を k 上の G-関手とする． $X, S \leq G$ かつ $\alpha \in a(S)$ とする．次が成立するとき，(G, S, α, X) を（a に関して）特異な 4つ組という：

(S.1) $\alpha^G_X \neq 0$,

(S.2) S の部分群 T が X の真部分群に G で共役ならば

$\alpha_T = 0$.

部分群 S を特異な部分群といい S が G の真部分群であるとき特異な4つ組(G, S, α, X)は proper であるといわれる.

以下では k を完備局所的単項 ideal 整域とし 2 節の記号の下で議論する.

D は $\varepsilon r_{|H}\varepsilon$ の defect 群であるから $r(D)$ の元 ψ で $\varepsilon = \varepsilon\psi^H\varepsilon$ となるものが存在する. ε^G の逆元を δ とし $\phi = \varepsilon_D\psi\varepsilon_D\delta_D$ とおくと $\phi^H = \varepsilon\delta_H$, $\phi^G = 1$ である.

補題 3.2 上の記号の下で次は同値である:

(1) $\lambda^G_H : a(G) \longrightarrow b(H) : \alpha \longmapsto \alpha_H\varepsilon$ は同型である.

(2) $(\mathrm{Im}\ \rho^G_D)\varepsilon_D = (\mathrm{Im}\ \rho^H_D)\varepsilon_D$.

(3) $(\mathrm{Im}\ \rho^G_D)\phi = (\mathrm{Im}\ \rho^H_D)\phi$.

定理 1. k を完備局所的単項 ideal 整域とし, $r \in A_k(G)$ を local ring, $a \in M_k(G)$ を r- 加群とする. D を r の defect 群, $N_G(D) \leq H \leq G$, b を a の (G, D, H, r) に関する Green correspondent とする. G − H の任意の元 g に対して $D^g \cap D$ が $b_{|D}$ に関する特異な部分群でなければ $\lambda^G_H : a(G) \longrightarrow b(H) : \alpha \longmapsto \alpha_H\varepsilon$ は

同型である．ここで ε は b を定義する $r(H)$ の原始巾等元である．

証明の概略は次の通りである．$(\mathrm{Im}\,\rho^G_D)\phi < (\mathrm{Im}\,\rho^H_D)\phi$ と仮定する．補題 3.1 から $a(H)$ の元 α で $(\alpha_D\phi)^G = 0$, $\alpha_D\phi \neq 0$ となるものが存在する．ϕ のとり方から $(\alpha\varepsilon)_D \neq 0$ である．X を D の部分群で $(\alpha\varepsilon)_X \neq 0$ なるもので最小位数のものとする．Mackey の公理と pairing の公理によって

$$\sum_{g\in\Gamma}(((\alpha\varepsilon)^g_{D^g\cap D} - (\alpha\varepsilon)_{D^g\cap D})\phi^g_{D^g\cap D}\varepsilon_{D^g\cap D})^D_X = -(\alpha\varepsilon)_X,$$

ここで Γ は G における (D, D)- 両側剰余類の代表系である．従って $G-H$ の元 g で $\zeta = ((\alpha\varepsilon)^g_{D^g\cap D} - (\alpha\varepsilon)_{D^g\cap D})\phi^g_{D^g\cap D}\varepsilon_{D^g\cap D}$ に対して $\zeta^D_X \neq 0$ であり $\zeta\in b(D^g\cap D)$, かつ $(D, D^g\cap D, \zeta, X)$ は $b_{|D}$ に関する特異な4つ組になるものが存在して，矛盾．

注意　$N = N_G(D)$ とおく．c を b の $(H, D, N, \varepsilon r_{|H}\varepsilon)$ に関する Green correspondent とする．c は a の (G, D, N, r) に関する Green correspondent である．従って例えば $G-N$ の任意の元 g に対して $D^g\cap D$ が $c_{|D}$ に対する特異な4つ組でなければ，任意の $H \geq N_G(D)$ に対して $a(G)$ と $b(H)$ は同型である．

4. 加群の Green correspondence と cohomology 群

この節では定理1を cohomology 群に応用してみる．以下では

次の記号を固定して用いる：

k ： 完備局所的単項 ideal 整域，(π) ： k の極大 ideal

p ： $k/(\pi)$ の標数

U ： 直既約 kG-加群， D ： U の vertex， W ： 対応する source

H ： $N_G(D)$ を含む G の部分群，V ： U の (G, D, H) に関する Green correspondent.

補題 4.1 D が W を係数加群とする n 次 cohomology 群 D-関手 $\hat{h}^n_W$ の socle $\mathrm{Soc}(\hat{h}^n_W)$ に対する proper 特異部分群をもたなければ $\hat{H}^n(G, U)$ と $\hat{H}^n(H, V)$ は同型である．k が標数 p の体で，D が中心化群 D-関手 c_W に対する proper 特異部分群をもたなければ $c_U(G)$ と $c_V(H)$ は同型である．

証明の概略は次の通りである。 $a = \mathrm{Soc}(\hat{h}^n_U)$, $b = \mathrm{Soc}(\hat{h}^n_V)$ とおく．b は a の (G, D, H, e_U) に関する Green correspondent である．cohomology 群は有限であるから，$\lambda^G_{H|a(G)} : a(G) \longrightarrow b(H)$ が同型であることを示せばよい，ここで λ^G_H は 2 節で定義された $\hat{h}^n_U(G) \longrightarrow \hat{h}^n_V(H)$ の分解型の単型である． $H = N_G(D)$ と仮定し D が $b_{|D}$ に対する proper 特異部分群をもたないことを示せば十分である． V は W^H の直和因子に同型であるから $V_{|D}$ は W^h, $h \in H$ 達の直和に同型である． よって D が各 $h \in H$ に対して $\mathrm{Soc}(\hat{h}^n_{W^h})$ に対する proper 特異部分群をもたないことを示せば

よい，これは仮定から容易に従う．中心化群関手 c_U, c_V を考えれば同様の議論により第2の主張が従う．

この補題を用いて次が示される．

定理2 (1) Dが可換で任意の $w \in W$ と $d \in D$ に対して $[w, d ; p-1] = 0$ が成立すれば $\hat{H}^n(G, U)$ と $\hat{H}^n(H, V)$ は同型である．

(2) k が標数 p の体で任意の $w \in W$ と $d \in D$ に対して $[w, d ; p-1] = 0$ が成立するならば $c_U(G)$ と $c_V(H)$ は同型である．

(3) k が標数 p の体で $W \simeq k$，D が弱正則ならば $H^1(G, U)$ と $H^1(H, V)$ は同型である．

References

[1] W.Feit, Representations of Finite Groups (mimeographed note, Yale Univ. 1969).

[2] J.A.Green, A transfer theorem for modular representations, J.Algebra 1 (1964) 73-84.

[3] _________, Axiomatic representation theory for finite groups, J.Pure Appl. Algebra 1 (1971) 41-77.

[4] T.Yoshida, On G-functors (I) : Transfer theorems for cohomological G-functors, Hokkaido Math. J. 9 (1980) 222-257.

[5] 吉田知行，トポスにおける transfer 理論，数学 32 (1980) 193 - 212.

[6] H.Sasaki, Green correspondence and transfer theorems of Wielandt type for G-functors, preprint.